MATEMATICĂ, JOC, ± INFORMATICĂ

Profesor Cioară Benea Daniela, Colegiul Național „Gheorghe Șincai” Cluj – Napoca

În general, rezolvarea unei probleme reprezintă principala finalitate a sistemului cognitiv și presupune aplicarea unui raționament care combină informațiile existente cu scopul de a obține informațiile noi/dorite. În era digitalizării, pentru o gamă largă de probleme, s-au găsit soluții informatice eficiente.

Problemele de matematică nu fac excepție, și în ultimii ani, mai ales, s-au dezvoltat numeroase aplicații/programe care rezolvă o gamă largă de probleme. Menționăm doar câteva dintre aceste aplicații, frecvent utilizate de către elevi:

- Photomath (Android/IOS – aplicație gratuită, care oferă explicații detailate pentru fiecare pas/etapă din rezolvarea unei probleme);
- Mathway (Android/IOS – aplicație gratuită, în limba engleză);
- Cymath (Android/IOS – Afișează gratuit răspunsurile problemelor, dar cere taxă pentru prezentarea rezolvărilor);
- Microsoft Mathematics – program gratuit pentru sistemele de operare Windows, execută rezolvarea asistată a problemelor de matematică, și nu numai (pot fi abordate probleme de fizică sau chimie);
- Wolfram Alpha – definit ca motor de căutare special oferă răspunsuri imediat pe baza cuvintelor cheie utilizate.

Opinia noastră este că aceste aplicații pot fi utile în procesul de învățare al matematicii, dar se știe și faptul că respectivele aplicații sunt folosite cu „succes”, în numeroase cazuri, cu precădere în timpul evaluărilor online atât la fraudarea examenelor și cât și al evaluărilor (de orice tip). Diminuarea efectelor de „pierdere în învățare”, (learning loss), este un subiect de maxim interes, pentru profesorii care desfășoară activități de predare, respectiv evaluare în format online. Acest aspect îl vom avea și noi în vedere, în cele ce urmează.

Devine lesne de înțeles faptul că, în procesul de invățare/evaluare, sunt de preferat a fi folosite cât mai multe probleme pe care aplicațiile amintite anterior nu le pot rezolva.
Din câte știm noi, o astfel de problemă, este și următoarea:

P1) Există numere formate doar cu cifra 1, care să fie divizibile cu 2023?

Folosind doar cunoștințe elementare, (principiul lui Dirichlet) de nivel gimnazial (știute chiar și de elevi de clasa a V-a, pasionați de matematică, în mod sigur de cei care optează să se pregătească pentru olimpiadele de matematică!), obținem răspuns afirmativ la problema de mai sus. Mai mult decât atât, putem deduce apoi, cu ușurință, că există o infinitate de astfel de numere.

Multe din problemele de matematică, pot fi rezolvate cu ajutorul calculatorului, cu forțe proprii, dacă avem abilitāti de programare, pentru a scrie un cod menit să rezolve problema. Astfel la **P1)**, se poate determina efectiv cel mai mic număr **n**, pentru care A = 111 ... 11 (cifra 1 se repetă de **n** ori), astfel încât acesta să se divídă cu 2023. Găsirea acestui număr, fără folosirea calculatorului, este practic (și teoretic!) imposibilă, pentru toți cei care refuză folosirea calculatorului, pentru probleme de acest fel.

Soluția informatică, pentru **P1)**, are în programul Calcme [1], următorul cod:

```
r  =  rem(11111,2023)  Define

i  =  1  Define

    while r ≠ 0 do
    t  =  r·10+1
    r  =  rem(t,2023)
    t  =  r
    i  =  i+1
    R  =  i+4
    end                    =   816  Calc
```

Așadar, numărul format din 816 cifre de 1, este divizibil cu 2023!

Următoarele 4 probleme, sunt derivate ale problemei P1):

P2) Aflați cel mai mic număr, format numai din cifre de 2, care este divizibil cu 26.

Răspunsul la **P2)**, este 222222. Un program similar cu cel de la **P1)**, găsește răspunsul în câteva milisecunde, dar numărul căutat, fiind mic, găsirea lui ar fi fost posibilă și fără calculator!

P3) Există numerele cele mai mici posibile, **An**, **Am**, formate din **n**, respectiv **m** cifre de 1, **An** divizibil cu **a**, **Am** divizibil cu **b**, cu a<b și n>m?

În caz afirmativ, dați exemplu de două astfel de numere.
Răspunsul este afirmativ, și pentru a =2017 < 2023 =b, avem n = 2016 > 816 =m. Lăsăm în seama cititorului să verifice răspunsul și/sau să găsească alte exemple.

P4) Există numere de forma 123123123 ... 123, divizibile cu 2023?
Așa cum era de așteptat, avem din nou răspuns afirmativ și la această problemă! Numărul 123123 ... 123, în care 123 se repetă de 272 de ori, este divizibil cu 2023, după cum rezultă și din codul CalcMe, de mai jos:

```
r = rem(123123,2023)  Define

i = 2  Define

    while r≠0 do
    t = r·1000+123
    r = rem(t,2023)
    t = r
    i = i+1
    end                    =   272  Calc
```

Următoarea problemă este inspirată din lista celor propuse la JBMO 2017 și a fost propusă la concursul național de matematică online Mate Moodle 2017 (concurs cuprins în CAER/CAEN 2020, poziția 129, începând cu anul 2015).

P5) Fie **A** un număr natural cu cifrele nenule și **P** produsul cifrelor sale. Numărul **A** se numește ***interesant*** dacă produsul cifrelor numărului **A** este egal cu produsul cifrelor lui **A + P**. Găsiți un număr interesant de 3 cifre.

Codul de mai jos, creat cu Wiris CAS, predecesorul programului CalcMe, testează (vezi funcția test f) dacă numărul cerut este ***interesant***, și iar w, este un posibil răspuns corect, adică un element din mulțimea tuturor numerelor *interesante* de trei cifre.

```
Edit algorithm with Wiris CAS
variables
f(B):=begin
        a=⌊B/100⌋
        b=⌊(B−a·100)/10⌋
        c=B−a·100−b·10
        C=B+a·b·c
        if C<1000 then
          x=⌊C/100⌋
          y=⌊(C−x·100)/10⌋
          z=C−x·100−y·10
        end
        s:=(a·b·c=x·y·z)?
        return s
      end
w=random{128,214,239,266,318,613,637,695,819}
f(819) → true
```

P6) Să se determine (fără a efectua calculele) cu câte zerouri se termină evaluarea produsului 1·2·3·4·...·n, unde **n** este un număr natural din intervalul [1,10^9].

O idee de rezolvare eficientă presupune să determinăm câți factori de cinci conține fiecare număr natural, care formează valoarea lui n! (n factorial), având în vedere că factorul cu valoarea doi apare mai des în aceste numere. Acest număr găsit reprezintă soluția problemei propuse.

O posibilă soluție, realizată în CalcMe este prezentată în imaginea de mai jos:

```
n = random(1,(10^9))
L = {}
k = 1
u = floor((n/(5^k)))
if (u==0) then
  S = 0
else
  while (u!=0) do
    L = append(L,u)
    k = (k+1)
    u = floor((n/(5^k)))
  end
end
m = length(L)
S = (sum_operator(j in 1..m)(L subindex_operator(j)))
n
```

Pe aceeași idee, propunem spre rezolvare problemele P7) și P8).

P7) Determinați (fără a efectua calculele) cu câte zerouri se termină produsul elementelor x_i, i=1,2,...,n.

Exemplu: Pentru n=10 si vectorul X = (12,15,254,525,56,125,500,105,48,912) se va afisa 10 (zerouri).

P8) Fie **n** un număr natural ($n \in [1,10^9]$). Determinați cel mai mare număr natural **P** cu proprietatea că numărul $\mathbf{45^P}$ este divizor al numărului obținut prin evaluarea produsului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$. (Problemă din subiectul de la Simularea examenului de bacalaureat 2022, disciplina informatică)

Exemplu: Dacă n=14 atunci valoarea lui p este 2, deoarece $45^2=2025$ care este divizor al lui $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 14=8717829120$.

P9) Un număr natural **n** se numește **automorf,** dacă numărul n^2 are ultimele cifre egale cu cifrele lui n (în aceeași ordine). Determinați dacă un număr natural n este automorf sau nu.

Exemplu: numerele 6 și 25 sunt automorfe, deoarece $\mathbf{6}^2=3\mathbf{6}$**,** iar $\mathbf{25}^2=6\mathbf{25}$**.**

Rezolvarea acestei probleme o lăsăm în seama cititorului interesat de găsirea soluției.

Astfel, în selectarea problemelor prezentate, pe lângă apropierea lor de matematică, un rol important l-a avut și cunoștințele de informatică ale autorului cât și preferințele acestuia în selectarea problemelor (care uneori acestea pot fi propuse elevilor sub forma unor jocuri distractive/competiții) și care presupun găsirea unor metode eficiente de rezolvare. Sperăm ca *intersecția* cu preferințele cititorului să nu fie vidă, iar acesta să ducă mai departe, raționamentele prezentate către elevi sau publicul interesat.

Bibliografie și resurse web:

1) Culegeri de probleme de matematică și informatică; enunțuri proprii de probleme.
2) Programul de formare „Aventura cunoașterii în lumea reală și digitală”, acreditat de MEN prin Ordinul 4737/09.08.2019.
3) Programul de formare „Curriculum relevant, educație deschisă pentru toți – CRED”.
4) Platforma Moodle, aplicația Wiris.